参赛队员：梁琦

学校：汾阳中学

省份：山西省

指导教师：陈志勇

论文题目：正N边形形内各顶点与各边中点连线的交点个数的计数问题

题目：正 **N** 边形形内各顶点与各边中点连线的交点个数的计数问题。

摘要：海南省海南中学的许伦博研究过《正**N**边形形内对角线交点个数的计数问题》。

本文主要研究了正**N**边形形内各顶点与各边中点连线的交点个数的计数问题。研究得到以下结论：

当**N**为偶数时,交点个数为 $\frac{1}{6}n^4-\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{3}n^2$

当 **N** 为奇数时，交点个数为 $\frac{1}{6}n^4-n^3+\frac{11}{6}n^2-n+1$

研究用的方法主要是分类讨论。

关键词：正 **N** 边形　顶点　中点　交点个数

Abstract: LunBo Xu from Hainan province has researched into ***The Question of Counting for Intersection Points of Inner Diagonal Lines of Regular N Polygon***

.

This article is mainly about to work out the number of the Intersection points of between the vertexes and midpoints of the Lines of Regular N Polygon.

The results is

If N is an even number, the formula is $\frac{1}{6}n^4-\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{3}n^2$

If N is an odd number, the formula is $\frac{1}{6}n^4-n^3+\frac{11}{6}n^2-n+1$

The main way of researching is taxonomy.

【key words】 Regular N polygon

Vertex

A midpoint

The number of intersection

引言： 研究正**N**边形形内各顶点与各边中点连线的交点个数的计算问题。

当 **N** 为偶数时，图形只存在两线一点的情况。
当 **N** 为奇数时，图形存在两线一点，三线一点，多线一点的情况。
因此因进行分类讨论。

一、正偶数多边形形内各顶点与各边中点连线的交点个数问题

引理：交点个数=两点一线的个数

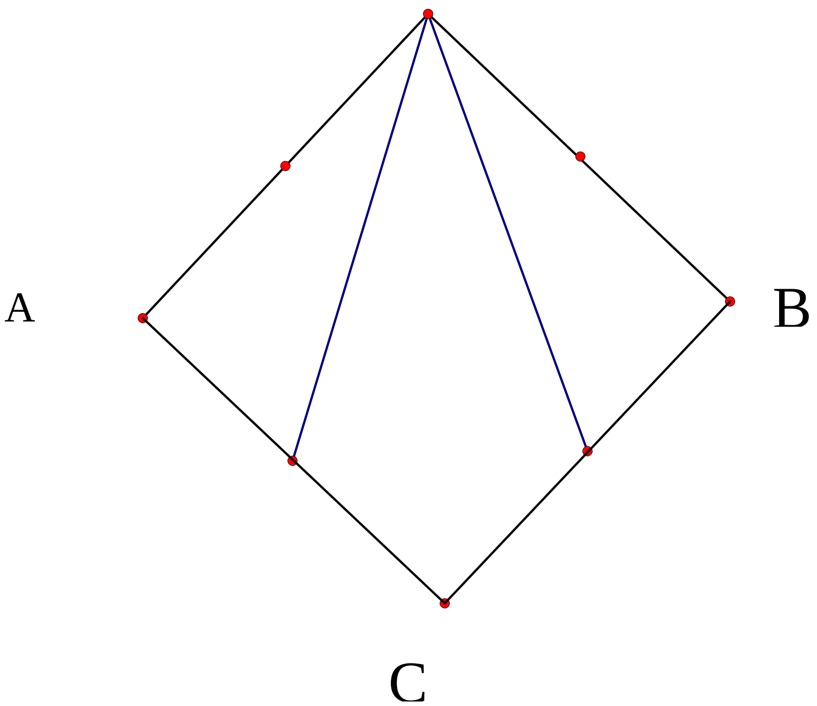
定理 **1**：正 **n** 边形(**n** 为偶数)形内各顶点与各边中点连线的的交点个数为

$$\frac{1}{6}n^4-\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{3}n^2$$

证明： 固定一个顶点然后连接左右对称的两个中点。研究这种连线与其他连线的交点个数。
设：正 **n** 边形最多隔 **a** 个中点（则 **a=n/2-1**）**.**
首先可以证明下列结论

隔 **1** 个中点	有 **4**（**n-2**）个交点
隔 **2** 个中点	有 **2[4**（**n-3**）**]**个交点
隔 **3** 个中点	有 **3[4**（**n-4**）**]**个交点
…	
隔 **a** 个中点	有 **a[4**（**n-a-1**）**]** 个交点

1 隔 **1** 个中点（即：连接顶点与离中点最近的中点）

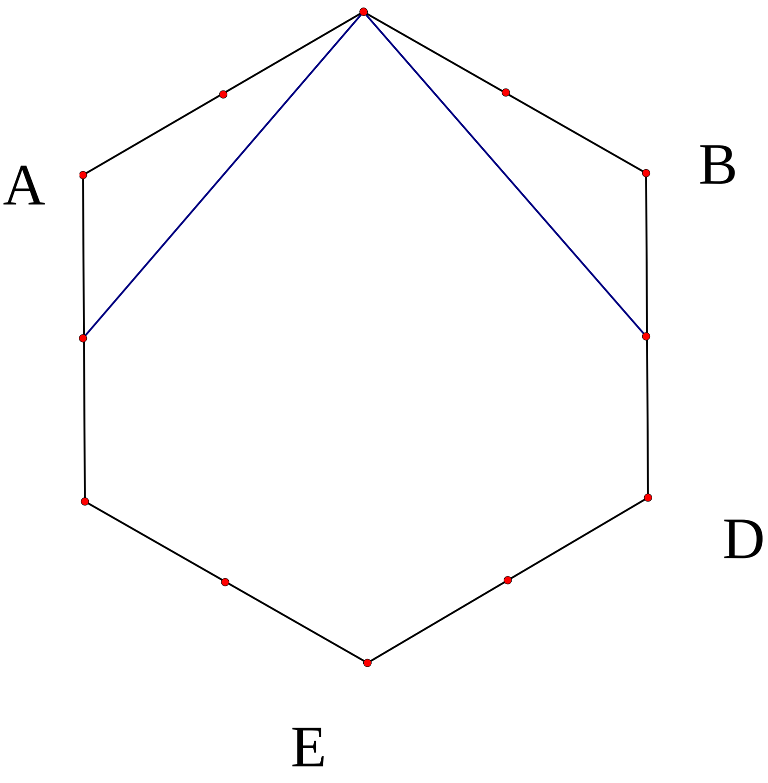


A,B 点引出的线段与图中所示线段的交点个数　　**2×2+2×1**

C 点引出的线段与图中所示线段的交点个数　　**2×1**

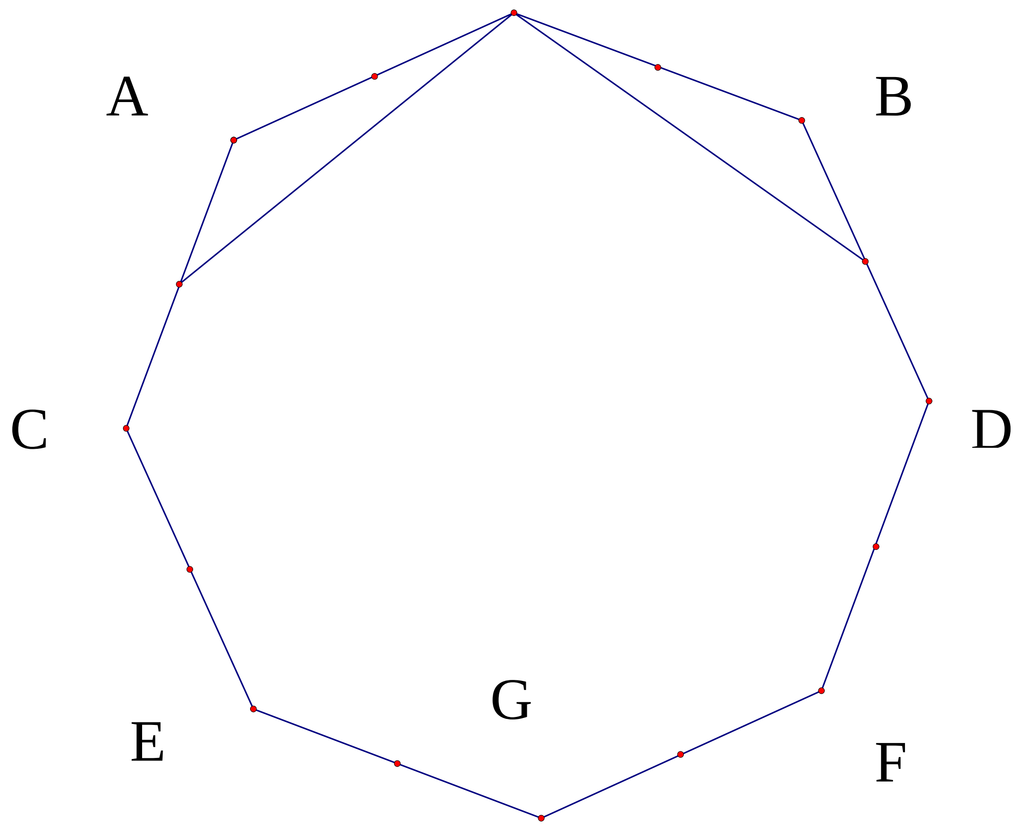
共 **8** 个点

（注：**2×a** 中　**2** 表示两个对称的点有相同的交点个数
a 表示一个顶点引出的线段与已知线段的交点个数
以下类同）



A,B 点引出的线段与图中所示线段的交点个数　2×2+2×1+2×1+2×1
C,D 点引出的线段与图中所示线段的交点个数　2×1+2×1
E 点引出的线段与图中所示线段的交点个数　　2×1

共 18 个点



A,B 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 2×2+2×1+2×1+2×1+2×1+2×1
C,D 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 2×1+2×1
E,F 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 2×1+2×1
G 点引出的线段与图中所示线段的交点个数　　2×1

共 24 个点

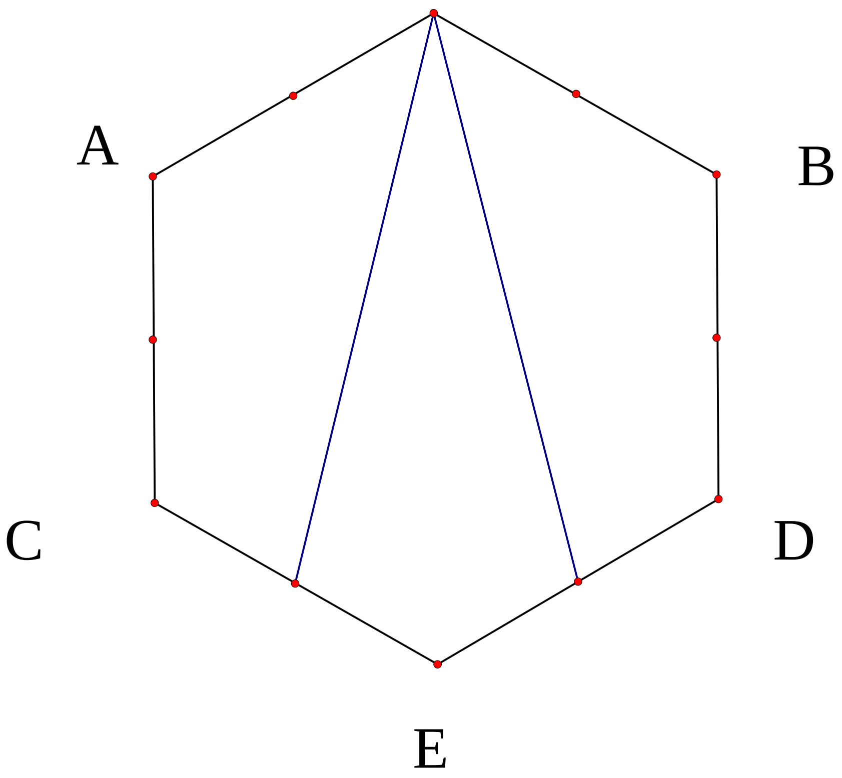
各点引出的线段与顶点连接距离最近的两个中点的两条线段的交点个数

2×2+（2×1）（n-3）+（2×1+2×1）(n/2-1-1)+2×1

=4+2n-6+2n-8+2

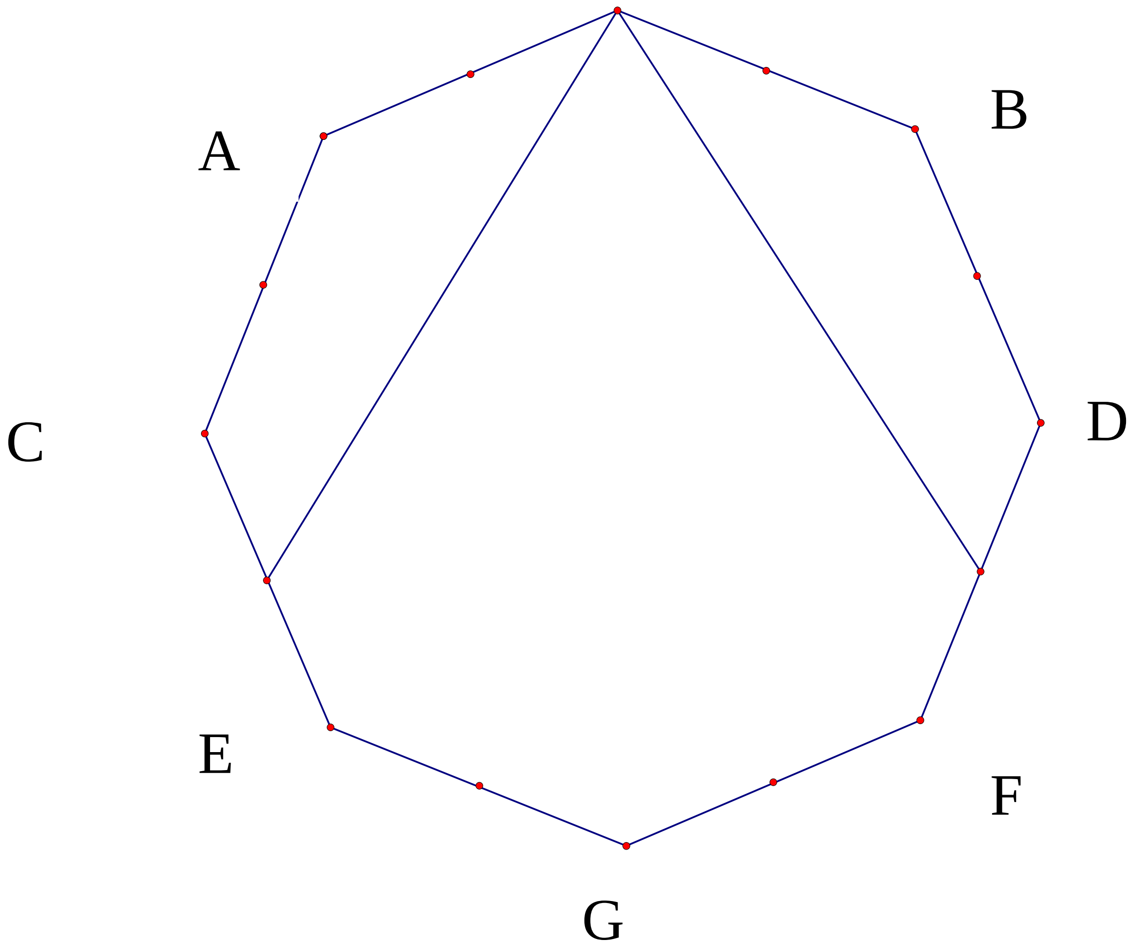
=4n-8

2、隔 2 个中点



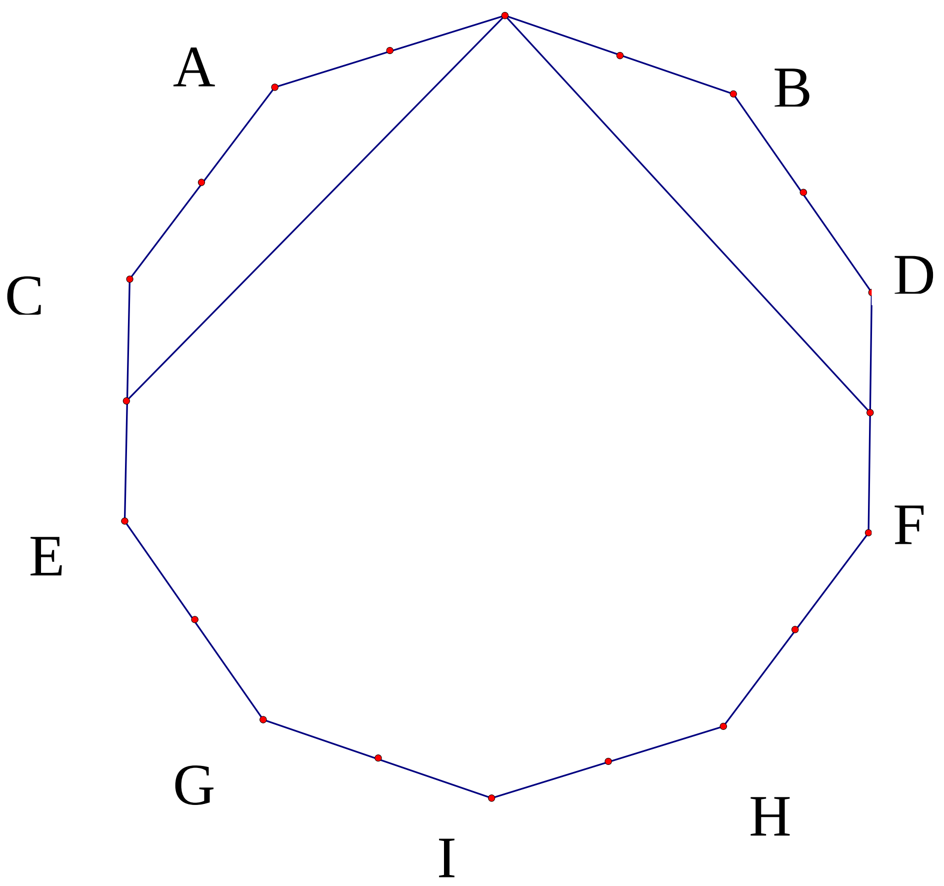
A,B 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2+2×2+2×1**
C,D 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2+2×2+2×1**
E 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2**

共 **24** 个点



A,B 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2+2×2+2×1+2×1+2×1**
C,D 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2+2×2+2×1+2×1+2×1**
E,F 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×1+2×1+2×1+2×1**
G 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2**

共 **40** 个点



A,B 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 2×2+2×2+2×1+2×1+2×1+2×1+2×1

C,D 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 2×2+2×2+2×1+2×1+2×1+2×1+2×1

E,F 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 2×1+2×1+2×1+2×1

G,H 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 2×1+2×1+2×1+2×1

I 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 2×2

共 56 个点

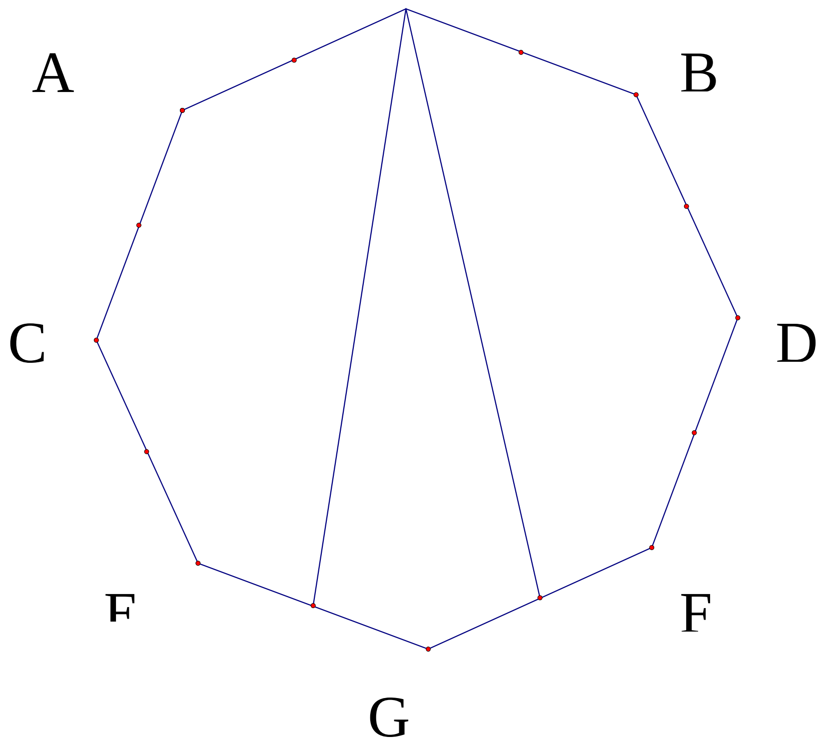
各点引出的线段与顶点连接隔两个中点的两条线段的交点个数

2×[2×2+2×2+（2×1）（n-5）]+2×1×4（n/2-3）+4

=16+4n-20+4n-24+4

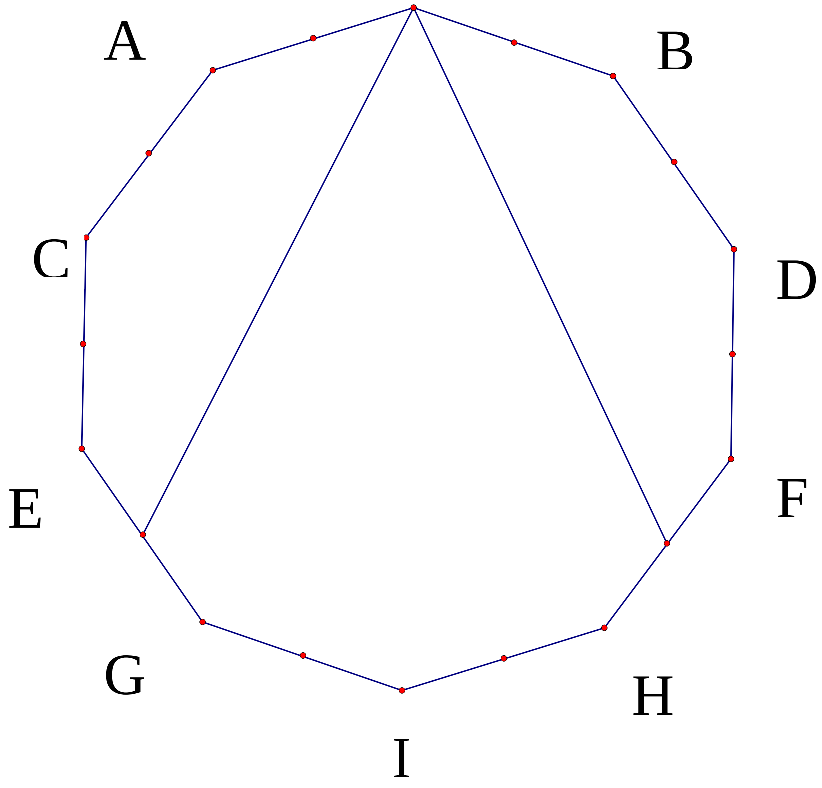
=8n-24

3,隔 3 个中点



A,B 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2+2×2+2×2+2×1**
C,D 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2+2×2+2×2+2×1**
E,F 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2+2×2+2×2+2×1**
G 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×3**

共 **48** 个点



A,B 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2+2×2+2×2+2×1+2×1+2×1**

C,D 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2+2×2+2×2+2×1+2×1+2×1**

E,F 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×2+2×2+2×2+2×1+2×1+2×1**

G,H 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×1+2×1+2×1+2×1+2×1+2×1**

I 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **2×3**

共 **72** 个点

各点引出的线段与顶点连接隔三个中点的两条线段的交点个数

3 ×[2×2×3+（2×1）（n-7）]+（2×1）×6（n/2-4）＋ 6

=36+6n-42+6n-48+6

=12n-48

可证明上述结论

则前 **a** 项和为

$$4(n-2)+2[4(n-3)]+3[4(n-4)]+\cdots+a[4(n-a-1)]$$

$$=4\left\{\frac{n\times a\times(a+1)}{2}-[1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+a\times(a+1)]\right\}$$

$$=4\left[\frac{n\times a\times(a+1)}{2}-\frac{a(a+1)(a+2)}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{3}n^2-n^2+\frac{2}{3}n$$

两线一点的个数=固定顶点引出的各条线段与其他线段的交点个数×顶点个数×$\frac{1}{2}$

$$=\left(\frac{1}{3}n^3-n^2+\frac{2}{3}n\right)\times n\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{6}n^4-\frac{1}{2}n^3+\frac{2}{3}n^2$$

利用引理得

交点个数=两线一点的个数

$$=\frac{1}{6}n^4-\frac{1}{2}n^3+\frac{2}{3}n^2$$

二、正奇数多边形形内各顶点与各边中点连线的交点个数问题

引理：交点个数=两线一点的个数+三线一点的个数+多线一点的个数

定理 2：正 **n** 边形**(n** 为奇数**)**形内各顶点与各边中点连线的的交点个数为

$$\frac{1}{6}n^4-n^3+\frac{11}{6}n^2-n+1$$

证明

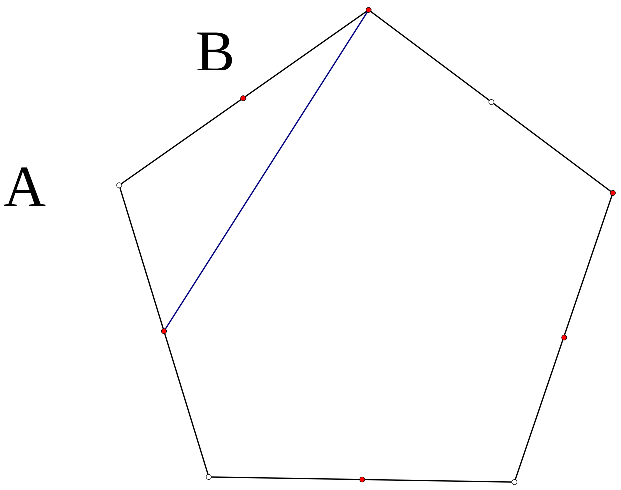
固定一顶点然后依次连接对称轴一侧的中点（对称轴为固定的那一顶点与图形中点连线所在的直线）研究这种连线与其他连线的交点个数。

设：正 **n** 边形最多隔 **a** 个中点（则 **a=**（**n-1**）**/2-1**）

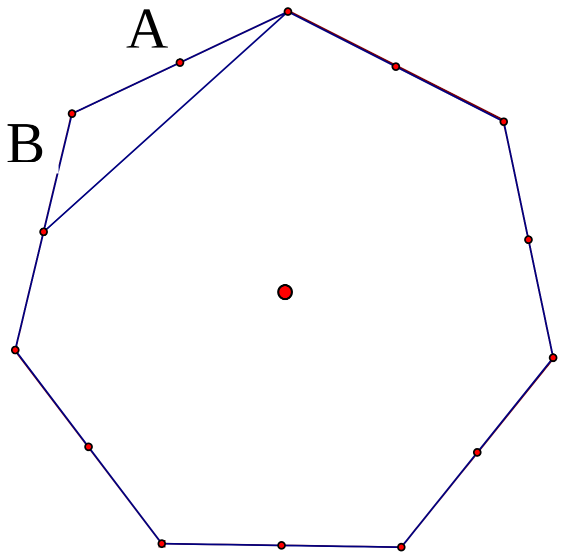
首先可以证明下列结论

隔 **1** 个中点	有 **2**（**n-2**）个交点
隔 **2** 个中点	有 **2[2**（**n-3**）**]**个交点
隔 **3** 个中点	有 **3[2**（**n-4**）**]**个交点
…	
隔 **a** 个中点	有 **a[2**（**n-a-1**）**]** 个交点

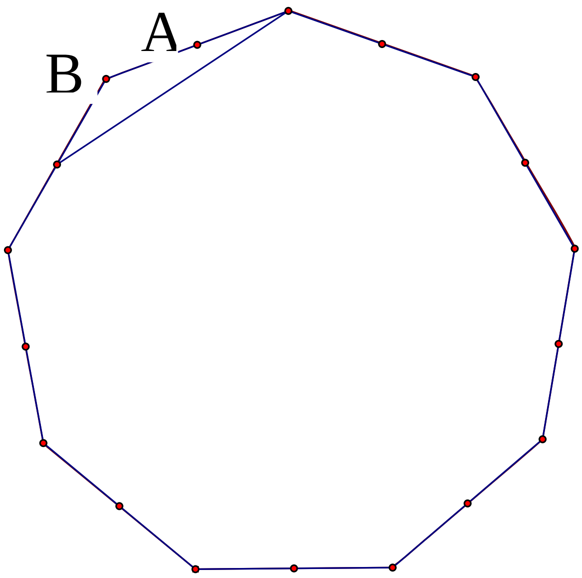
1.隔 1 个中点



A,B 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 2 × 3



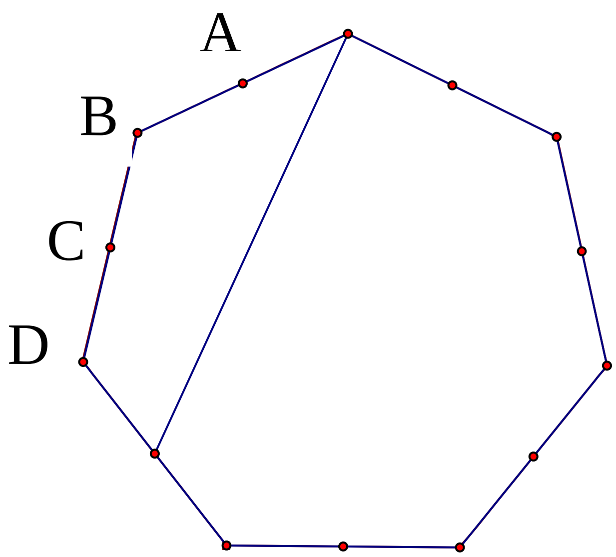
A,B 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 2×5



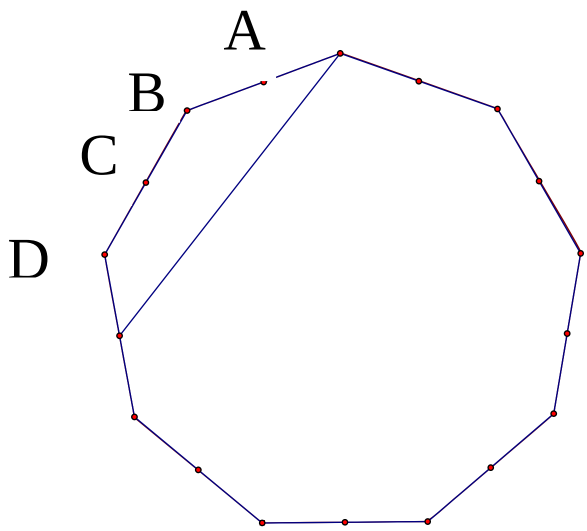
A,B 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 2×7

A,B 引出的线段与顶点和隔一个中点连接的线段的交点个数 2(n-2)

2.隔 2 个中点



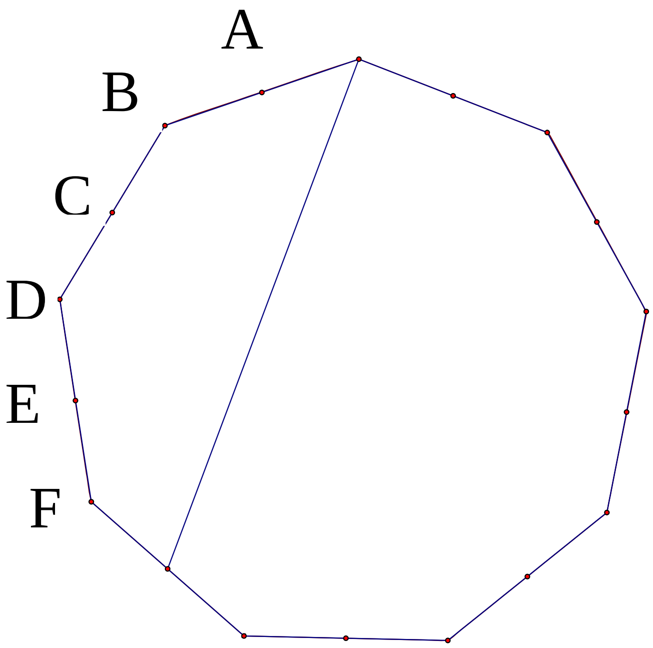
A,B,C,D 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 4×4



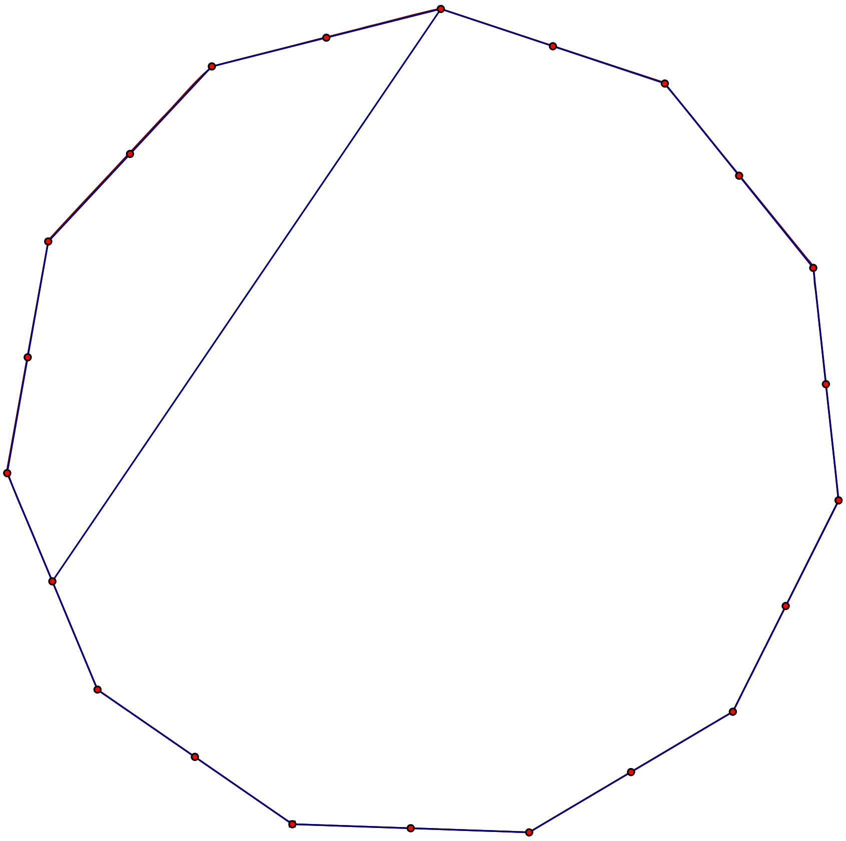
A,B,C,D 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 4×6

A,B,C,D 引出的线段与顶点和隔一个中点连接的线段的交点个数 4(n-3)= 4n-12

3.隔 3 个中点



A,B,C,D,E,F 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **6×5**



A,B,C,D,E,F 点引出的线段与图中所示线段的交点个数 **6×7**

A,B,C,D 引出的线段与顶点和隔一个中点连接的线段的交点个数 **6（n-4）=6n-24**

可证明上述结论

则前 **a** 项和为

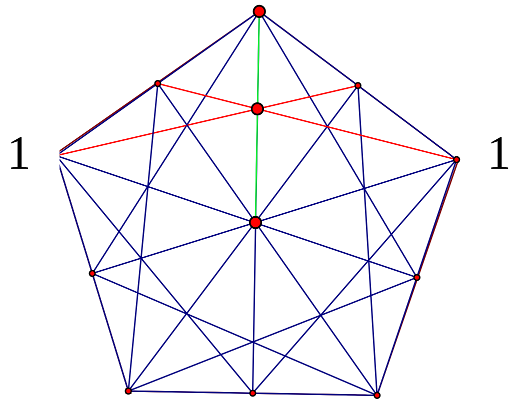
$$2（n-2）+2[2（n-3）]+3[2（n-4）]+\cdots+a[2（n-a-1）]$$
$$=2\left\{\frac{n\times a\times(a+1)}{2}-[1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+a\times(a+1)]\right\}$$
$$=2\left[\frac{n\times a\times(a+1)}{2}-\frac{a(a+1)(a+2)}{3}\right]$$
$$=\frac{1}{6}n^3-\frac{3}{4}n^2+\frac{5}{6}n-\frac{1}{4}$$

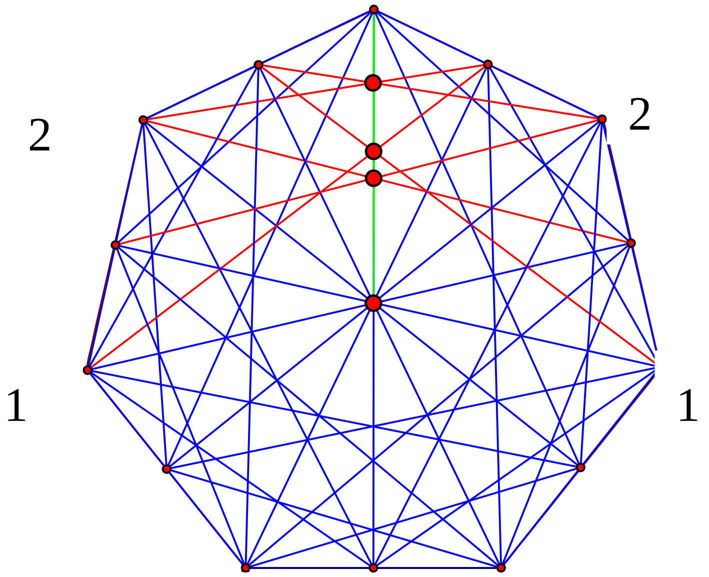
理论上两线一点的个数=前a项和×2×n×$\frac{1}{2}$

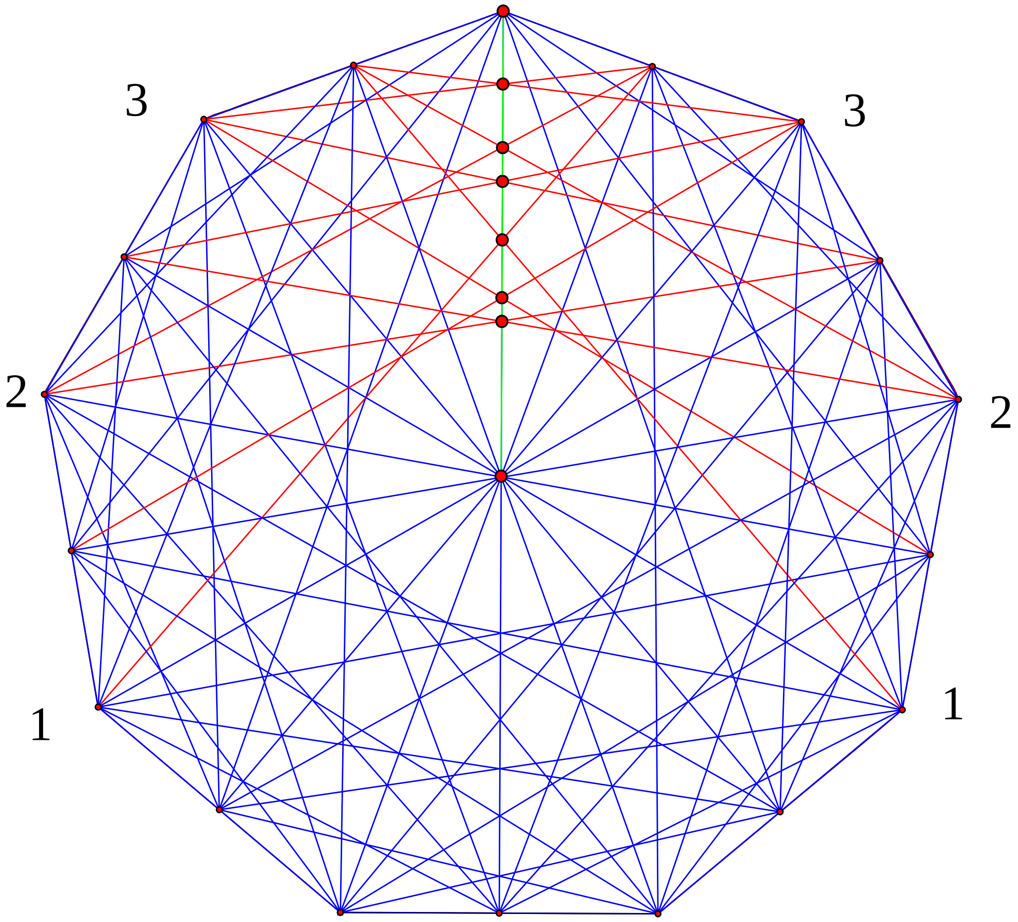
$$=\left(\frac{1}{6}n^3-\frac{3}{4}n^2+\frac{5}{6}n-\frac{1}{4}\right)\times2\times n\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{6}n^4-\frac{3}{4}n^3+\frac{5}{6}n^2-\frac{1}{4}n$$

三线一点的个数

注：数字表示各个顶点引出的线段与已知线段构成三线一点的个数







在正奇数 **n** 边形中，离顶点最近的顶点在已知线段上构成三线一点的个数

(n-1)/2-1

在已知线段中共有

$$1+2+3+\cdots+\frac{n-1}{2}-1$$

$$=\frac{\left(1+\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}$$

$$=\frac{1}{8}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{3}{8}$$

在正奇数 **n** 边行中，每个点（包括顶点与中点）与中点的连线都有**(n-1)/2-1** 个交点

三线一点的个数为

$$\left(1+2+3+\cdots+\frac{n-1}{2}-1\right)\times 2n$$

$$=\left(\frac{1}{8}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{3}{8}\right)\times 2n$$

$$=\frac{1}{4}n^3-n^2+\frac{3}{4}n$$

两线一点的个数=理论上两线一点的个数**-2×**三线一点的个数

$$=\left(\frac{1}{6}n^4-\frac{3}{4}n^3+\frac{5}{6}n^2-\frac{1}{4}n\right)-2\times\left(\frac{1}{4}n^3-n^2+\frac{3}{4}n\right)$$

$$=\frac{1}{6}n^4-\frac{3}{4}n^3+\frac{5}{6}n^2-\frac{1}{4}n-\frac{1}{2}n^3+2n^2-\frac{3}{2}n$$

$$=\frac{1}{6}n^4-\frac{5}{4}n^3+\frac{17}{6}n^2-\frac{7}{4}n$$

多线一点的个数 **1**（即图形中点）

利用引理得

交点个数=两线一点的个数+三线一点的个数+多线一点的个数

$$=\left(\frac{1}{6}n^4-\frac{5}{4}n^3+\frac{17}{6}n^2-\frac{7}{4}n\right)+\left(\frac{1}{4}n^3-n^2+\frac{3}{4}n\right)+1$$

$$=\frac{1}{6}n^4-n^3+\frac{11}{6}n^2-n+1$$

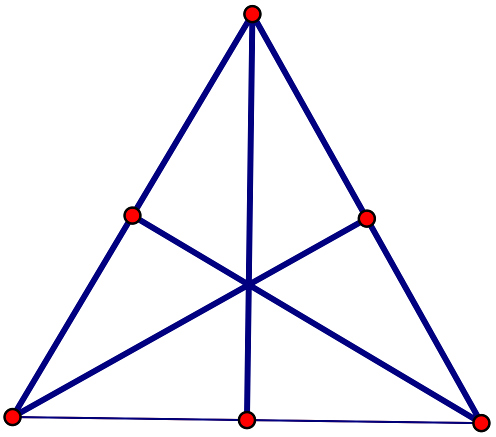
结论

定理一：正N边形（N为偶数）形内各顶点与各边中点连线的交点个数为 $\frac{1}{6}n^4-\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{3}n^2$

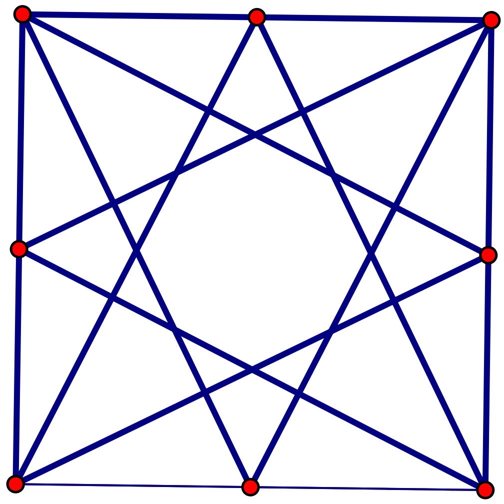
定理二：正N边形（N为奇数）形内各顶点与各边中点连线的交点个数为 $\frac{1}{6}n^4-n^3+\frac{11}{6}n^2-n+1$

附：正 **n** 边形顶点与中点连线的交点图及形内交点个数。

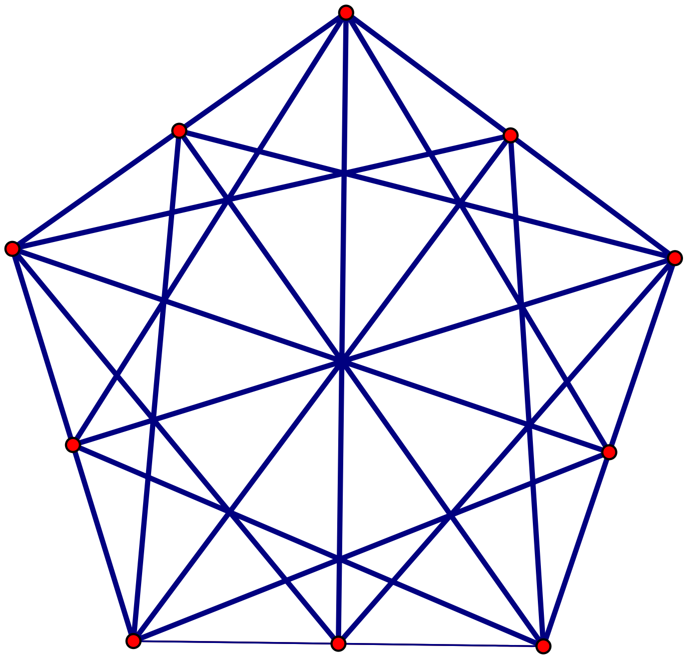
正三角形　　　　交点个数 **1**



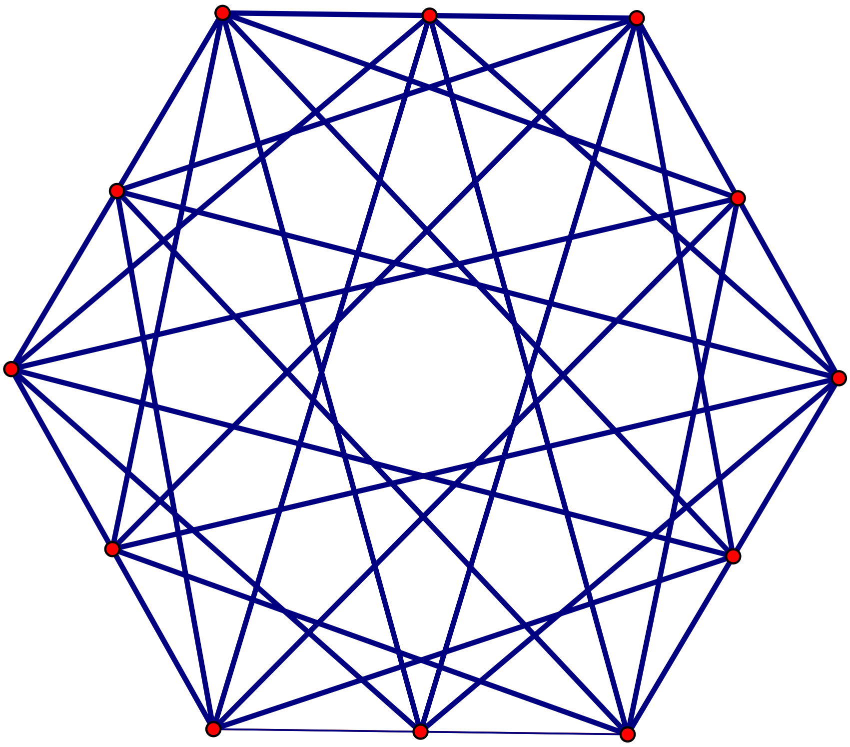
正四边形　　　　交点个数 **16**



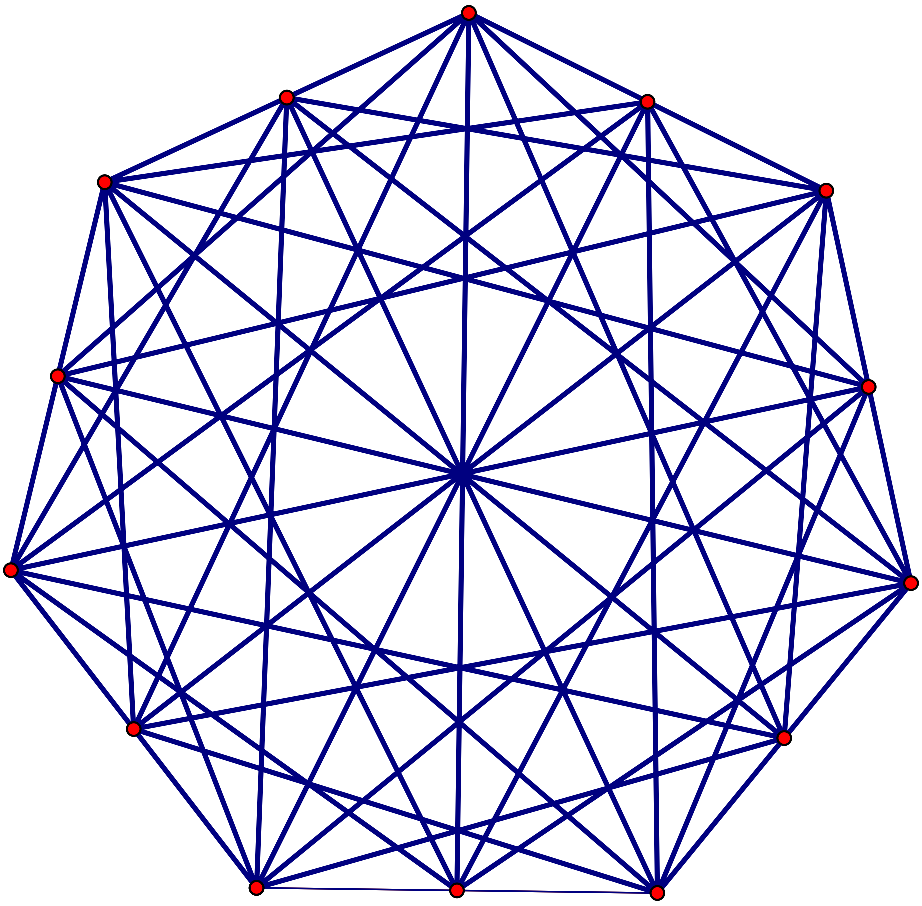
正五边形　　　　　　交点个数 **21**



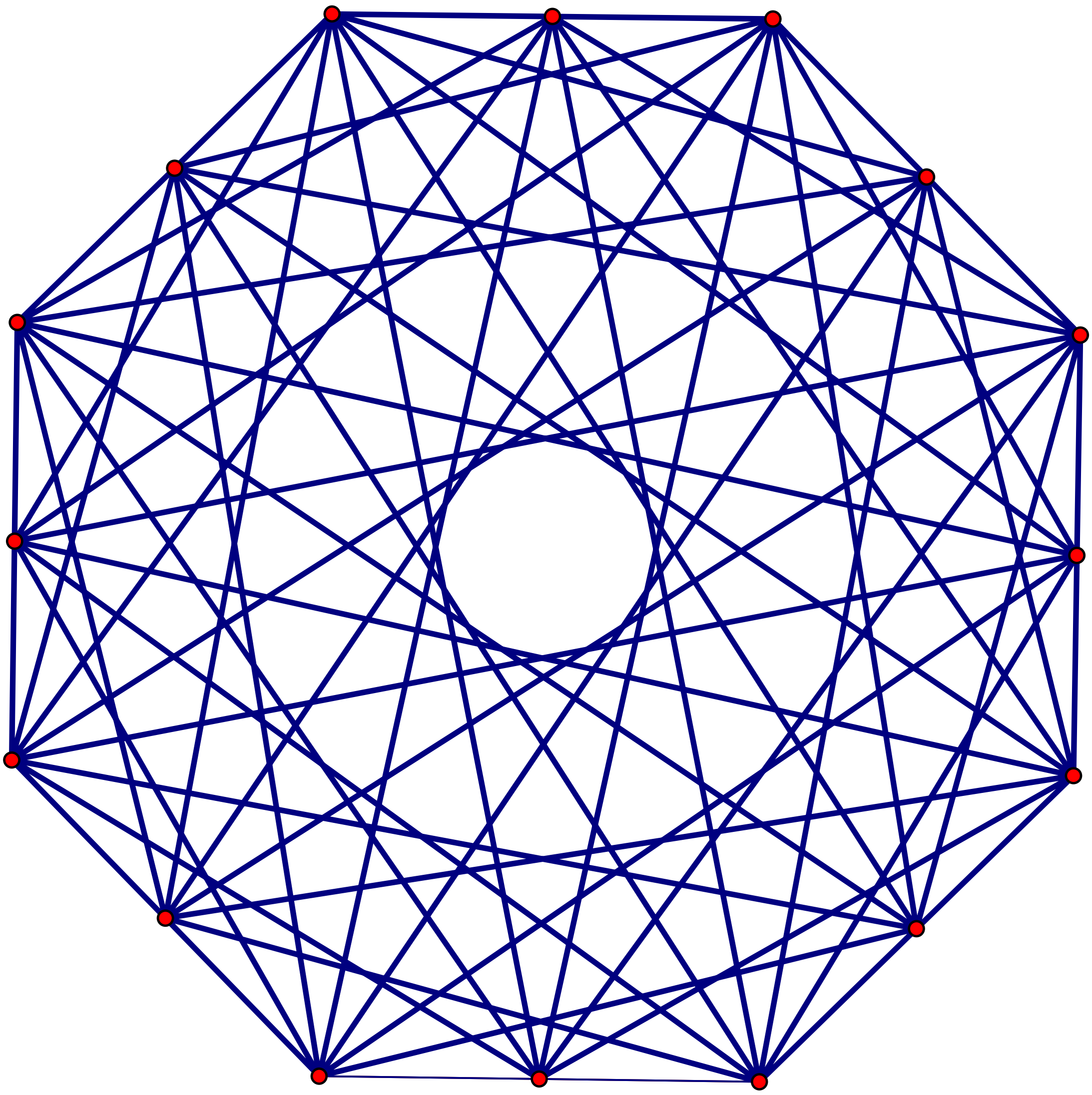
正六边形　　　　　　交点个数 **120**



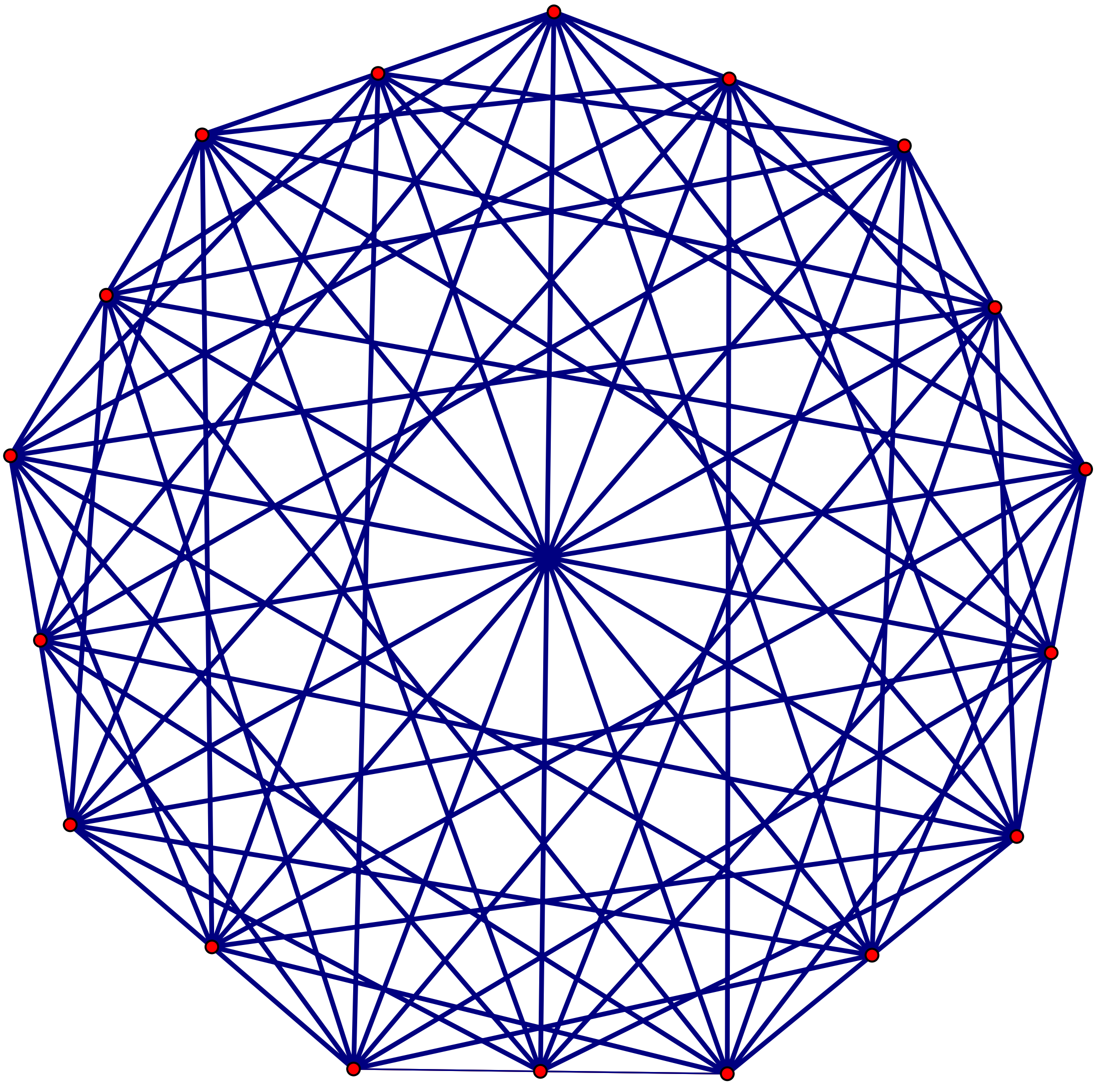
正七边形　　　　交点个数 **141**



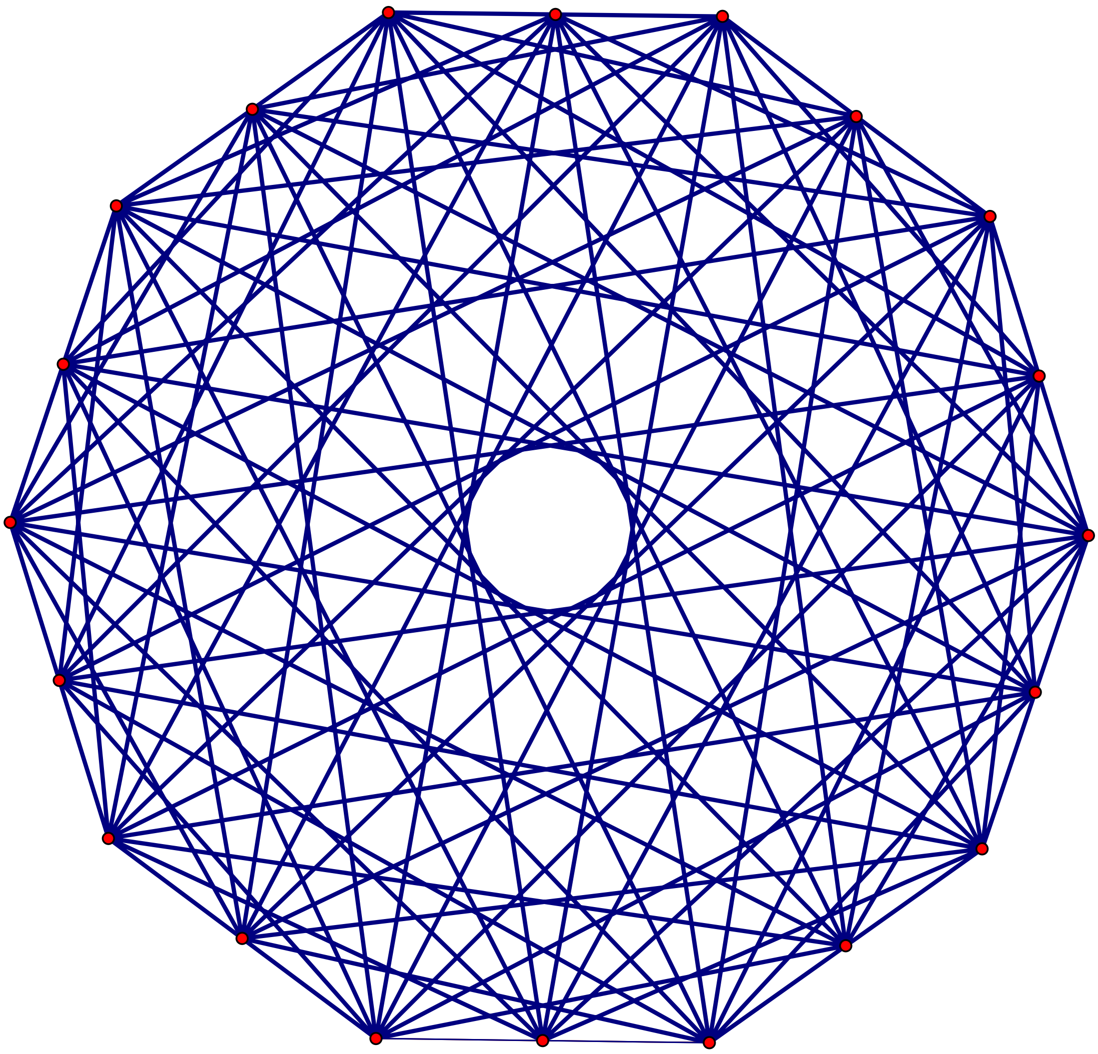
正八边形　　　　交点个数 **448**



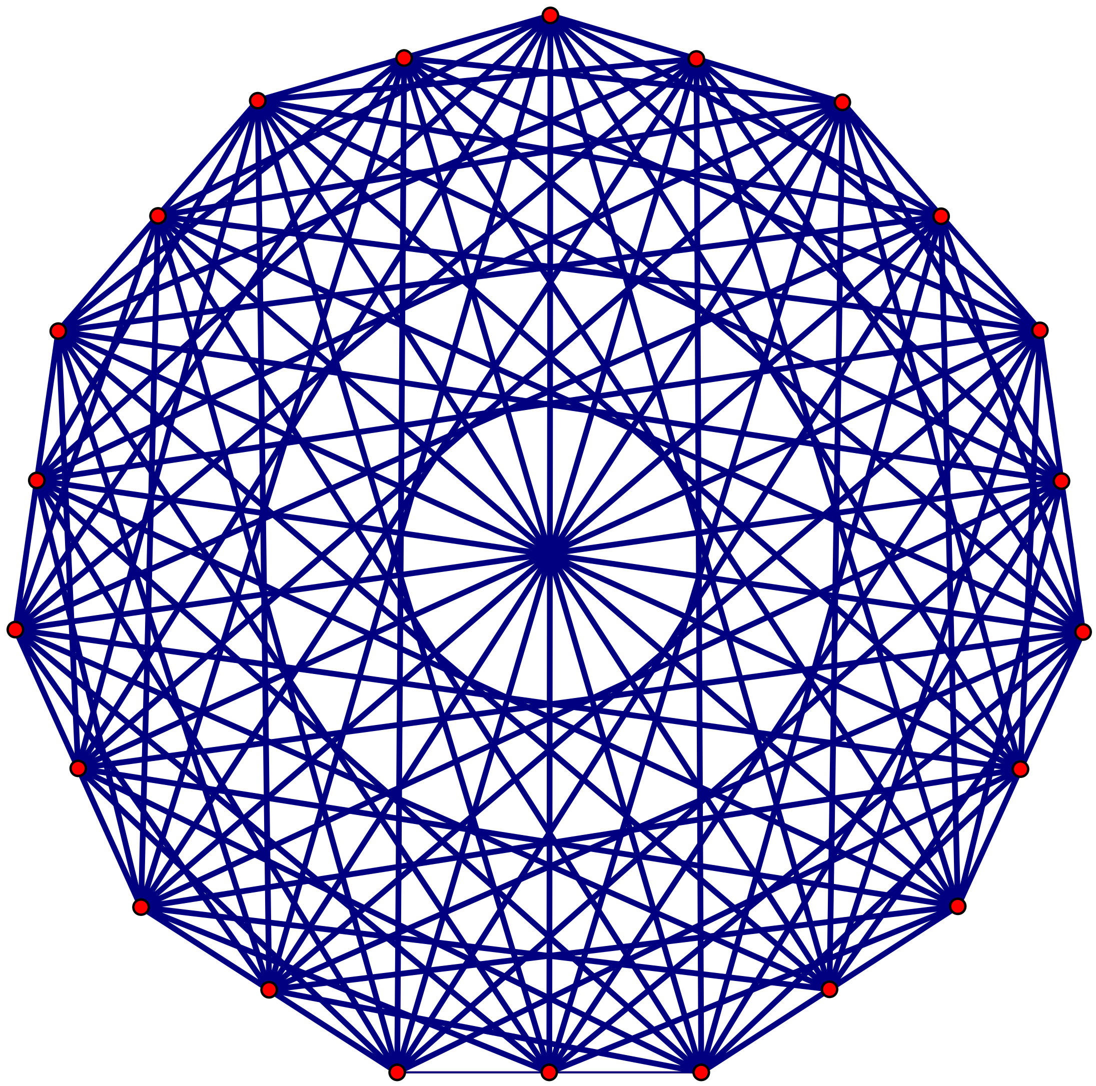
正九边形　　　交点个数 **505**



正十边形　　交点个数 **1200**



正十一边形　　　交点个数 **1321**



参考文献：

海南省海南中学的许伦博的论文《正N边形形内对角线交点个数的计数问题》。
百度文库中[1×2+2×3+3×4+ ••• +a×(a+1)]的算法